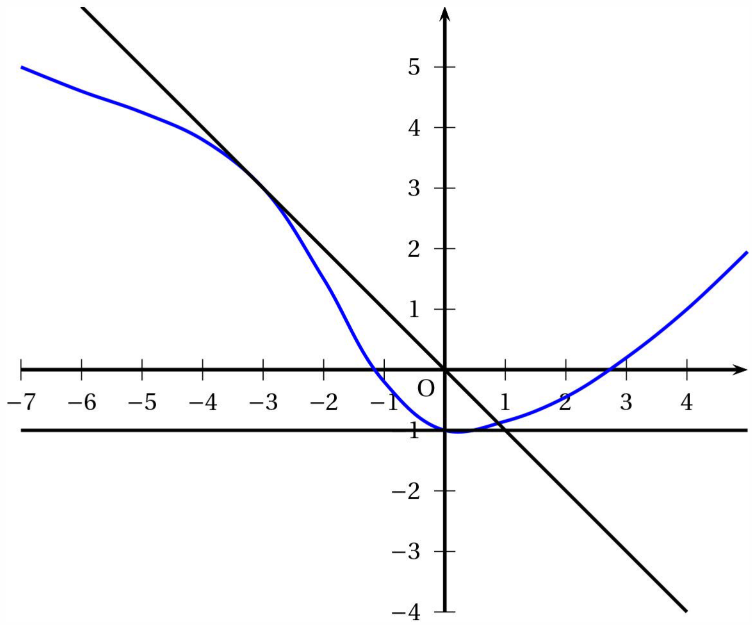
Baccalauréat 2016 - ES/L Liban

Série ES/L Obli. et Spé.
31 mai 2016
Correction

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Soit la représentation graphique d'une fonction f ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et O.



Question 1 (Réponse c)

a. f'(O) = -1 | b. f'(-1) = 0 | c. f'(-3) = -1 | d. f'(-3) = 3

Preuve.

- Au point d'abscisse 0, la tangente est horizontale donc $f'(0) = 0$ ce qui exclu la réponse a.
- Au point d'abscisse -1, la tangente n'est pas horizontale donc $f'(-1) \neq 0$ ce qui exclu la réponse b.
- Au point d'abscisse -3, la tangente est de pente négative donc $f'(-3) < 0$ ce qui exclu la réponse d.
- La seule réponse possible à la question 1 est la réponse c.

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = (x+1)\ln(x)$.

Question 2 (Réponse d)

a. $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ **b.** $g'(x) = 1 + \ln(x)$

c. $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d.** $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \ln(x)$

Preuve.
La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction g est de la forme $uv + 2$ donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

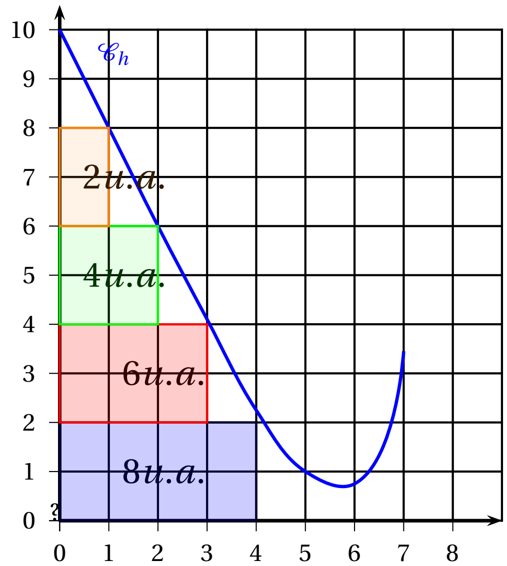
$$\forall x \in\,]0;+\infty[\ ;\ g(x) = u(x) \times v(x) \ :\ \begin{cases} u(x) = (x+1) & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) & ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in\,]0;+\infty[,\ \ g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + (x+1) \times \frac{1}{x}$$
$$\boxed{\forall x \in\,]0;+\infty[\ ;\ g'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x)}$$

La seule réponse possible à la question 2 est la réponse d.

3. On considère la fonction h définie sur $[0\,;\,7]$ et représentée par la courbe ci-dessous :



Question 3 (Réponse b)

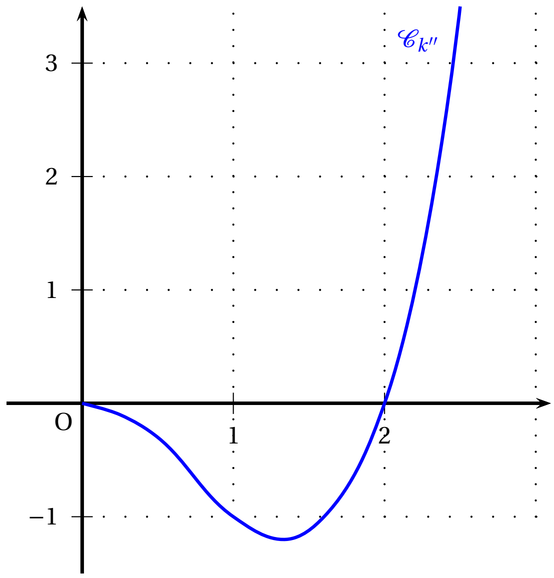
a. $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = h(5) - h(0)$ **b.** $20 < \displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 30$

c. $15 < \displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 20$ **d.** $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = 20$

Preuve.

- La fonction h est positive sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ donc l'intégrale de 0 à 5 est aussi positive ce qui exclu la réponse a puisque graphiquement $h(5) < h(0) \Longrightarrow h(5) - h(0) < 0$.
- $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$. Au moins 20 carré unité sont compris dans ce domaine comme on on peut le voir sur le graphique donc la seule réponse possible à la question 3 est la réponse b.

4. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.



Question 4 (Réponse a)

a. k est concave sur l'intervalle $[1\,;2]$.

b. k est convexe sur l'intervalle $[0\,;2]$.

c. k est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d. k est concave sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Preuve.
En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles**.
f est concave si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles**.

- Sur l'intervalle $[1\,;2]$, la dérivée seconde k'' est négative donc d'après la propriété 2, le fonction k est concave sur cet intervalle. La réponse a est correcte, il n'est pas nécessaire de tester les autres.
  La seule réponse possible à la question 4 est la réponse a.

Exercice 2. Probabilités **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

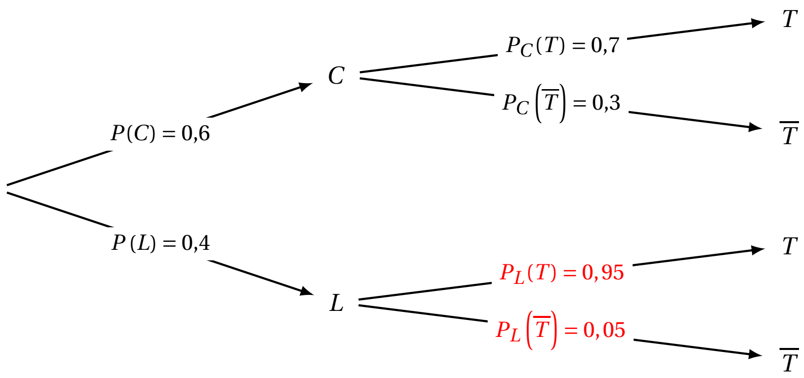
Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens. Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un. On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux évènements suivants :

- C : « le jeune choisi est un collégien » ;
- L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
- T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

1. Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.

- « Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens. » donc $p(C) = 0,6$ et $p(L) = 0,4$;
- « 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable » donc $p(T) = 0,8$;
- « [...] parmi les collégiens, 70 % en possèdent un » donc $p_C(T) = 0,7$;

2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.



3. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
La probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable est $p(C \cap T)$ soit :

$$p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,6 \times 0,7 = \underline{0,42}$$

4. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
La probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable est $p_T(C)$ soit :

$$p_T(C) = \frac{p(C \cap T)}{p(T)} = \frac{0,42}{0,8} = \underline{0,525}$$

5.

5. a. Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
D'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(T) = p(T \cap L) + p(T \cap C)$$

Soit

$$p(T \cap L) = p(T) - p(T \cap C)$$
$$p(T \cap L) = 0,8 - 0,42$$

Donc

$$\boxed{p(T \cap L) = 0,38}$$

En outre

$$\boxed{p_L(T) = \frac{p(T \cap L)}{p(L)} = \frac{0,38}{0,4} = \underline{0,95}}$$

5. b. Compléter l'arbre construit dans la question 2.

Partie B

En 2012 en France, selon une étude publiée par l'Arcep (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes), les adolescents envoyaient en moyenne 83 SMS (messages textes) par jour, soit environ 2 500 par mois. On admet qu'en France le nombre de SMS envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 650$. Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les probabilités arrondies au millième.

1. Calculer la probabilité qu'un adolescent envoie entre 2 000 et 3 000 SMS par mois.
La variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 650$ donc la calculatrice donne directement le résultat :

$$\boxed{p\,(2000 \leq X \leq 3000) \approx 0,558}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

TIStat.normFDR(2000, 3000, 2500, 650) ≈ 0,5582

2. Calculer $p(X \geqslant 4000)$.

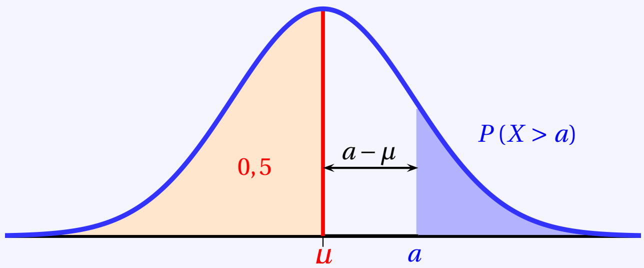
Propriété 1 $(P\,(X > a)\ ;\ a > \mu)$

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors on a :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P\,(X > a) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



Donc ici puisque X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 650$:

$$\boxed{p(X \geqslant 4000) = 0,5 - p(2500 \leq X \leq 4000) \approx \underline{0,011}}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

0,5 − TIStat.normFDR(2500, 4000, 2500, 650) ≈ 0,01051

3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0,8$, déterminer la valeur de a. On arrondira le résultat à l'unité. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
On cherche a tel que $p(X \leqslant a) = 0,8$ où X suit une loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 650$. A l'aide de la fonction inverse loi normale de la calculatrice, on trouve arrondi à l'unité :

$$\boxed{a \approx 3047}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

TIStat.invNorm(0.06, 2500, 650) ≈ 3047,1

Cela signifie donc que <u>80% des adolescents envoient au plus 3 047 SMS par mois.</u>

Exercice 3. Obligatoire - Suites 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées. Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir. En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits. On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.

1. a. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.
En 2016, l'entreprise aura gagné 12 % des 75 contrats de 2015 et en aura perdu 6 donc ce qui nous donne un nombre de contrats en 2016 de :

$$75 \times (1+12\%) - 6 = 1,12 \times 75 - 6 = \underline{78}$$

1. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.
Pour tout entier n, en $2015+(n+1)$, l'entreprise aura gagné 12 % des u_n contrats de $2015+n$ et en aura perdu 6 donc ce qui nous donne un nombre de contrats en $2015+(n+1)$ de :

$$u_{n+1} = u_n \times (1+12\%) - 6 = \underline{1,12 \times u_n - 6}$$

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3		Traitement : Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leqslant 100$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,12U - 6$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher …

2. a. Recopier et compléter la ligne L9.
On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher donc à partir de quand le nombre de contrats dépassera 100. Il faut alors en sortie :

$\boxed{\text{Afficher } 2015+n}$ ou $\boxed{\text{Afficher } n}$ même si la première solution correspond plus à la question posée.

2. b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.
On peut ajouter une ligne pour avoir l'année.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
n	0	1	2	3	4	5	6	7
U arrondi à l'unité	75	78	81	85	89	94	99	105

2. c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur.
L'algorithme affichera donc $2015+7 = 2022$ ce qui correspond à l'année à partir de laquelle le nombre de contrats sera supérieur à 100 ce qui imposera l'embauche de personnel.

3. On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 75 \\ u_{n+1} & = 1{,}12 \times u_n - 6 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 50 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ v_{n+1} &= (1{,}12\ u_n - 6) - 50 \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times u_n - 56 \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times \left(u_n + \frac{-56}{1{,}12} \right) \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times (u_n - 50) \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 1{,}12$, et de premier terme $v_0 = 25$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 50 \\ v_0 &= 75 - 50 \\ v_0 &= 25 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 25 \\ v_{n+1} & = 1{,}12 \times v_n \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1{,}12^n + 50$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}12$, et de premier terme $v_0 = 25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_n = 25 \times (1{,}12)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 50$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 50$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n = 25 \times (1{,}12)^n + 50}$$

3. c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.

Pour tout entier naturels n :

$$u_n > 100 \iff 25 \times 1,12^n + 50 > 100$$
$$\iff 1,12^n > \frac{50}{25} = 2$$

En composant par la fonction ln définie et croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$u_n > 100 \iff \ln 1,12^n > \ln 2$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$u_n > 100 \iff n \ln 1,12 > \ln 2$$

En divisant chaque membre par $\ln 1,12 > 0$, l'ordre est inchangé et :

$$u_n > 100 \iff n > \frac{\ln 2}{\ln 1,12} \approx 6,12$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 7.

3. d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

On retrouve alors le premier rang de l'année $2015 + n$ pour lequel le nombre de contrats est supérieur strictement à 100 soit $n = 7$ comme nous l'avons vu dans la question **(2.c.)**.

Exercice 3. Spécialité - Suites — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

[...] les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant. Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec PiscinePlus ;
- 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier .

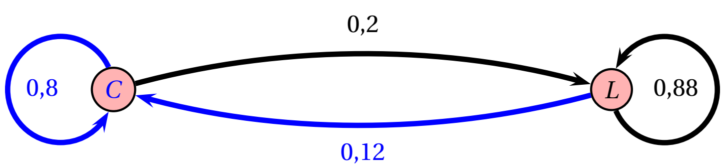
Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'évènement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'évènement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

On se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients .

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée avec les sommets dans l'ordre C et L.



La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de C vers C, de C vers L ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de L vers C, de L vers L.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}}$$

2. 2. a. Montrer que l'état stable de ce graphe est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

$$P \times M = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$$

$$P \times M = \begin{pmatrix} 0,375 \times 0,8 + 0,625 \times 0,12 & 0,375 \times 0,2 + 0,625 \times 0,88 \end{pmatrix}$$

$$P \times M = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$$

$$P \times M = P$$

On vient de prouver que $PM = P$ donc l'état stable de ce graphe est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

2. b. Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.
Sur le long terme, 37,4% des propriétaires de piscines privées souscriront un contrat avec l'entreprise. Elle atteindra donc son objectif d'avoir au moins 35% des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie B

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$;
- l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$. *- En 2015, on sait que 15 % des propriétaires étaient sous contrat avec PiscinePlus. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.*

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$.

Pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ est la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$ avec $c_n + l_n = 1$, donc par définition :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{n+1} & 1-c_{n+1} \end{pmatrix} = P_n \times M$$

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} & 1-c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+1} & 1-c_{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} & 1-c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8c_n + (1-c_n)0,12 & 0,2c_n + (1-c_n)0,88 \end{pmatrix}$$

On a donc pour tout entier naturel n,

$$\boxed{c_{n+1} = 0,8c_n + (1-c_n)0,12 = 0,68c_n + 0,12}$$

2. À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur 0,15
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		C prend la valeur $0,68C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

2. a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millième.

On peut ajouter une ligne pour avoir l'année.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
n	0	1	2	3	4	5	6
C	0.15	0.222	0.271	0.304	0.327	0.342	0.353

2. b. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur.

L'algorithme affichera donc 6. Cela signifie par conséquent qu'en $2015+6=2021$ l'entreprise aura atteint son objectif d'avoir au moins 35% des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n - 0,375$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.

Les suites (c_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_0 & = 0{,}15 \\ c_{n+1} & = 0{,}68 \times c_n + 0{,}12 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = c_n - 0{,}375 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= c_{n+1} - 0{,}375 \\ v_{n+1} &= (0{,}68\ c_n + 0{,}12) - 0{,}375 \\ v_{n+1} &= 0{,}68 \times c_n - 0{,}255 \\ v_{n+1} &= 0{,}68 \times \left(c_n + \frac{-0{,}255}{0{,}68}\right) \\ v_{n+1} &= 0{,}68 \times (c_n - 0{,}375) \\ v_{n+1} &= 0{,}68 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 0{,}68$, et de premier terme $v_0 = -0{,}225$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= c_0 - 0{,}375 \\ v_0 &= 0{,}15 - 0{,}375 \\ v_0 &= -0{,}225 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -0{,}225 \\ v_{n+1} & = 0{,}68 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}68$, et de premier terme $v_0 = -0{,}225$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \,;\; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; v_n = -0{,}225 \times (0{,}68)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = c_n - 0{,}375$$

On peut en déduire l'expression :

$$c_n = v_n + 0{,}375$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \,;\; c_n = -0{,}225 \times (0{,}68)^n + 0{,}375}$$

3. b. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geqslant 0,35$.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} c_n \geqslant 0,35 &\iff -0,225 \times 0,68^n + 0,375 \geqslant 0,35 \\ &\iff 0,68^n \leq \frac{0,35 - 0,375}{-0,225} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

En composant par la fonction ln définie et croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$c_n \geqslant 0,35 \iff \ln 0,68^n \leq \ln \frac{1}{9} = -\ln 9$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$c_n \geqslant 0,35 \iff n \ln 0,68 \leq -\ln 9$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,68 < 0$, l'ordre est changé et :

$$c_n \geqslant 0,35 \iff n \geq \frac{-\ln 9}{\ln 0,68} \approx 5,7$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 6.

3. c. Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

On retrouve ainsi la réponse à la question **(2.b.)**, en $2015 + 6 = 2021$ l'entreprise aura atteint son objectif d'avoir au moins 35% des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Exercice 4. Fonctions 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par : $f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f', la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle $[3\,;\,13]$, a pour expression : $f'(x) = 2\left(-1+\mathrm{e}^{-2x+10}\right)$.

La fonction f est dérivable sur $[3\,;\,13]$ comme somme et composée de fonction qui le sont. Pour tout réel x de l'intervalle $[3\,;\,13]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x+20)' - \left(\mathrm{e}^{-2x+10}\right)' \\ f'(x) &= -2 - \left(\mathrm{e}^{-2x+10}\right)' \end{aligned}$$

La dérivée d'une fonction de la forme e^{u} avec u dérivable est $u'\,\mathrm{e}^{u}$ soit avec $\begin{cases} u(x) = -2x+10 \\ u'(x) = -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 - (-2x+10)'\,\mathrm{e}^{-2x+10} \\ f'(x) &= -2 + 2\mathrm{e}^{-2x+10} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [3\,;\,13]\ ;\ f'(x) = 2\left(-1+\mathrm{e}^{-2x+10}\right)}$$

2. 2. a. Résoudre dans l'intervalle $[3\,;\,13]$ l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[3\,;\,13]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff 2\left(-1+\mathrm{e}^{-2x+10}\right) \geq 0 \\ &\iff -1+\mathrm{e}^{-2x+10} \geq 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-2x+10} \geq 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-2x+10} \geq \mathrm{e}^{0} \end{aligned}$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff -2x+10 \geq \ln 1 = 0 \\ f'(x) \geqslant 0 &\iff x \leq 5 \end{aligned}$$

Donc pour x de l'intervalle $[3\,;\,13]$ on a :

$$\boxed{f'(x) \geqslant 0 \iff 3 \leq x \leq 5}$$

2. b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.

On a encore en procédant de même :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2\left(-1+\mathrm{e}^{-2x+10}\right) = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-2x+10} = 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-2x+10} = \mathrm{e}^{0} \end{aligned}$$

Par propriété, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -2x+10 = \ln 1 = 0 \\ f'(x) = 0 &\iff x = 5 \end{aligned}$$

De ce fait on a l'étude complète du signe de la dérivée :

$$\boxed{\forall x \in [3\,;\,13]\ ;\ \left|\begin{array}{l} f'(x) > 0 \iff 3 \leq x < 5 \\ f'(x) = 0 \iff x = 5 \end{array}\right\} \implies f'(x) < 0 \iff 5 < x \leq 13}$$

$$f(3) = 14 - \mathrm{e}^4 \approx -40{,}598\ ;\ f(5) = 9 \text{ et } f(13) = -\mathrm{e}^{-16} - 6 \approx -6{,}000$$

x	3		5		13
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-40{,}598$	↗	9	↘	-6

2. c. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

f est la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par : $f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$. On a alors :

$$\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^{13} \left(-2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-2 \times \frac{x^2}{2} + 20x - \frac{1}{-2}\,\mathrm{e}^{-2x+10}\right]_3^{13}$$

$$\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 + 20x + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x+10}\right]_3^{13}$$

$$= 91 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-16} - \left(51 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^4\right)$$

Soit

$$\boxed{\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = 40 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-16}\right) \approx 12{,}701}$$

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle [3 ; 13] par la fonction f. En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par la fonction f.
Or d'après le tableau de variation produit lors de la question **(A.2.b.)**, la fonction f atteint son maximum pour $x = 5$. L'entreprise doit donc fabriquer 500 toboggans pour obtenir un bénéfice maximal. Elle réalise alors un bénéfice de 9 000 euros.

2. Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1 300 toboggans. Arrondir à l'euro.

Le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 3 centaines et 13 centaines de toboggans est donné, en milliers d'euros, d'après la question **(A.2.c)**, par :

$$\frac{1}{13-3}\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1{,}2701$$

Ce bénéfice, arrondi à l'euro, est donc de 1 270 euros.

Partie C : Rentabilité (EPI)

Remarque : cette question est de type EPI, Exercice à Prise d'Initiative.

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif. Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.
On cherche les valeurs de x telles $f(x) \geq 0$.

x	3	α	5	β	13
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-40{,}598$	0	9	0	-6

L'utilisation directe du tableau de variations suffisait ici d'après le programme mais nous proposons une rédaction plus soignée.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire sur [3; 5] :

- La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[3; 5]$;
- L'image par f de l'intervalle $[3; 5]$ est $\left[f(3); f(5)\right]$ d'après le tableau de variations.
- On a :
$$f(3) \approx -40,598 < 0 < f(5) \approx 9$$
Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[3; 5]$.
- **Valeur approchée**.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcr} f(3,73) & \approx & -1,14 < 0 \\ f(3,74) & \approx & 0,1 > 0 \end{array}\right|$, donc $3,73 < \alpha < 3,74$.

  Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 3,74$, (on choisit la valeur d'image positive).

Application du corollaire sur [5; 13] :

- La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[5; 13]$;
- L'image par f de l'intervalle $[5; 13]$ est $\left[f(13); f(5)\right]$ d'après le tableau de variations.
- On a :
$$f(13) \approx -6 < 0 < f(5) \approx 9$$
Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[5; 13]$.
- **Valeur approchée**.
Pour avoir un encadrement de β, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcr} f(9,99) & \approx & 0,02 > 0 \\ f(10) & \approx & -0,0000454 < 0 \end{array}\right|$, donc $9,99 < \beta < 10$.

  Une valeur approchée de β à 0.01 près est donc $\beta \approx 9,99$, (on choisit la valeur d'image positive).

Interprétation

$\boxed{\text{Ainsi l'entreprise réalise un bénéfice positif si elle produit entre 374 et 999 toboggans.}}$

Attention, une production de 373 ou 1 000 toboggans génère un bénéfice négatif !