Baccalauréat 2016 - S
Antilles-Guyane

Série S Obli. et Spé.
20 juin 2016
Correction

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats
Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. On définit les événements suivants : A : « l'ampoule provient de la machine A » ; B : « l'ampoule provient de la machine B » ; D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

1. a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

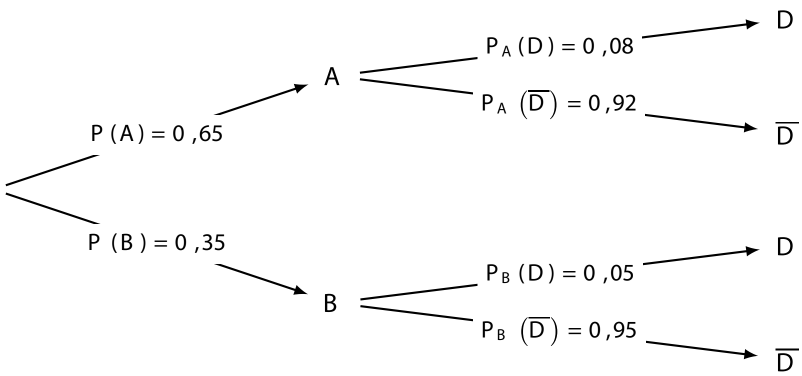
- « La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste » donc

$$P(A) = 0{,}65 \text{ et } P(B) = 0{,}35$$

- « 8 % des ampoules présentent un défaut à la sortie de la machine A et 5 % à la sortie de la machine B » donc

$$P_A(D) = 0{,}08 \text{ et } P_B(D) = 0{,}05 = \quad P_A\left(\overline{D}\right) = 0{,}92 \text{ et } P_B\left(\overline{D}\right) = 0{,}95$$

On obtient alors l'arbre suivant :



1. b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
On cherche $P\left(\overline{D}\right)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(\overline{D}\right) = P\left(\overline{D} \cap A\right) + P\left(\overline{D} \cap B\right)$$
$$P\left(\overline{D}\right) = P(A) \times P_A\left(\overline{D}\right) + P(B) \times P_B\left(\overline{D}\right)$$
$$P\left(\overline{D}\right) = 0{,}65 \times 0{,}92 + 0{,}35 \times 0{,}95$$
$$P\left(\overline{D}\right) = 0{,}598 + 0{,}3325$$

Soit

$$\boxed{p\left(\overline{D}\right) = 0{,}9305}$$

1. c. L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
On cherche $P_{\overline{D}}(A)$ soit :

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(A) \times P_A\left(\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right) = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305}} \approx 0,642\,7$$

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

- **Modélisation**
  On nomme X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ampoules prélevées sans défaut à la sortie de la machine A. Vérifions les hypothèses de validation d'une *loi binomiale*.
  - Une ampoule sortant de la machine A a *2 états* : elle est sans défaut ou elle ne l'est pas. La probabilité d'être sans défaut à la sortie de la machine A est : $p = 0.92 = P_A\left(\overline{D}\right)$.
  - Il y a 10« tirages ». Chaque tirage est *indépendant, identique* et *aléatoire*.

  De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 10 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0.92$.

  La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.92$, notée $\mathscr{B}(10\ ;\ 0.92)$.

- **Calcul**
  Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.92$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0.92^k \times (0{,}08)^{10-k}$$

  La probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut se traduit par :

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$$

  Donc :

$$\boxed{P(X \geq 9) \approx 0,812\,1}$$

  Remarque : Sur la TI Voyage 200

  TIStat.binomDdP($10\ ,\ 0.92\ ,\ 9$) + TIStat.binomDdP($10\ ,\ 0.92\ ,\ 10$) $\approx 0{,}812\,118$

- **Conclusion**
  La probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut est d'environ $0,812\,1$.

Partie B

1. Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) alors pour $a \in \mathbb{R}_+$, $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$.

1. a. Montrer que $P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.
Pour tout réel a positif on a :

$$\begin{aligned} P(T \geqslant a) &= 1 - P(T < a) \\ &= 1 - \int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}$ donc :

$$P(T \geqslant a) = 1 - \left[\ \lambda \times \frac{1}{-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\ \right]_0^a$$

$$P(T \geqslant a) = 1 + \left[\ \mathrm{e}^{-\lambda x}\ \right]_0^a = 1 + \mathrm{e}^{-\lambda a} - 1$$

$$\boxed{P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}}$$

1. b. Montrer que si T suit une loi expo. alors pour tous les réels positifs t et a on a : $P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+a) = P(T \geqslant a)$.
Pour tous les réels positifs t et a on a :

$$\begin{aligned} P_{T\geqslant t}\left(T \geqslant t+a\right) &= \frac{P\left(\left(T \geqslant t\right) \cap \left(T \geqslant t+a\right)\right)}{P\left(T \geqslant t\right)} \\ &= \frac{P\left(T \geqslant t+a\right)}{P\left(T \geqslant t\right)} \end{aligned}$$

Or on vient de prouver lors de la question précédente **(B.1.a)** que $P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$ soit :

$$\begin{aligned} P_{T\geqslant t}\left(T \geqslant t+a\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+a)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} \times \mathrm{e}^{-\lambda a}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda a} \\ &= P(T \geqslant a) \end{aligned}$$

Et donc, pour tous les réels positifs t et a on a :

$$\boxed{P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+a) = P(T \geqslant a)}$$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

2. a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
On sait que si T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000, alors

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 10\,000 \Longrightarrow \boxed{\lambda = 10^{-4}}$$

2. b. Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5\,000)$.
Or a prouvé lors de la question **(B.1.a)** que $P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$ soit :

$$\boxed{P(T \geqslant 5\,000) = \mathrm{e}^{-5\,000 \times 10^{-4}} = \mathrm{e}^{-0,5} \approx \underline{0,606\,5}}$$

2. c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.
Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures est donnée par $P_{T\geqslant 7\,000}(T \geqslant 12\,000)$ et :

$$P_{T\geqslant 7\,000}(T \geqslant 12\,000) = P_{T\geqslant 7\,000}(T \geqslant 7\,000 + 5\,000)$$

On applique alors le résultat de la question **(B.1.b)** : $P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+a) = P(T \geqslant a)$

$$P_{T\geqslant 7\,000}(T \geqslant 12\,000) = P(T \geqslant 5\,000)$$

On obtient donc avec le calcul mené lors de la question **(B.2.b)** :

$$\boxed{P_{T\geqslant 7\,000}(T \geqslant 12\,000) = \mathrm{e}^{-0,5} \approx \underline{0,606\,5}}$$

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

- **Analyse des données** : « *Sur un échantillon de* $n = 1000$ *ampoules . Il est supposé que* $p = 6\%$ *d'entre elles sont défectueuses.* ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 1\,000$, $p = 6\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 1000 \geq 30 \\ \checkmark & np = 1000 \times 0{,}06 = 60 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 1000 \times 0{,}94 = 940 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}06 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}06 \times 0{,}94}}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0{,}06 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}06 \times 0{,}94}}{\sqrt{1000}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}04528$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-4} près soit $\underline{0{,}0452}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}07472$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-4} près soit $\underline{0{,}0748}$.

$$\boxed{I_{1000} \approx [0{,}0452\ ;\ 0{,}0748]}$$

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000. De ce fait, la fréquence observée d'ampoules défectueuses appartient bien à l'intervalle de fluctuation asymptotique :

$$f = \frac{71}{1000} = 0,071 \in I_{1000}$$

Au risque d'erreur de 5% on ne peut pas remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

Exercice 2. Complexes (EPI) 3 points

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2|=1$.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

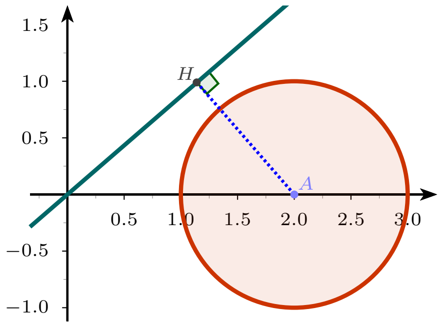
Soit A le point du plan complexe d'affixe 2 et M celui d'affixe z. On a alors :

$$M(z)\in\mathscr{C} \iff |z-2|=1 \iff AM=1$$

Et donc $\mathscr{C}$ est le <u>cercle de centre le point $A(2)$ et de rayon 1</u>.

2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=ax$. Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en fonction des valeurs du réel a.

- Un dessin peut aider :



- Un point $M(z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si son affixe est de la forme $z=x+\mathrm{i}\,(ax)$, où a est un réel. Et un point $M(z)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si $|z-2|=1$. Donc $M(z)$ appartient à l'intersection éventuelle de la droite et du cercle si :

$$\begin{aligned}
M(z)\in\mathscr{D}\cap\mathscr{C} &\iff \begin{cases} z=x+\mathrm{i}\,(ax)\\ |z-2|=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} z=x+\mathrm{i}\,(ax)\\ |x+\mathrm{i}\,(ax)-2|=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} z=x+\mathrm{i}\,(ax)\\ (x-2)^2+(ax)^2=1^2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} z=x+\mathrm{i}\,(ax)\\ (a^2+1)x^2-4x+3=0\end{cases}
\end{aligned}$$

On se ramène alors à une équation du second degré avec un discriminant $\Delta(a)$ qui dépend du réel a tel que :

$$\begin{aligned}
\Delta(a) &= 4^2-4(a^2+1)\times 3\\
&= 16-12a^2-12\\
&= -12a^2+4\\
&= -12\left(a^2-\frac{1}{3}\right)\\
\Delta(a) &= -12\left(a-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(a+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)
\end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta(a)$ est alors une fonction polynôme du second degré en la variable réelle a, l'étude de son signe est aisée :

$$\Delta(a) = -12\left(a - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(a + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

a	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
signe de $\Delta(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Conclusion**.
  - Un point d'intersection
    Si $\Delta(a) = 0$ soit :
    $$\Delta(a) = 0 \iff a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
    Alors l'équation admet une solution. La droite et le cercle ont 1 point d'intersection, cela ne se produit que deux fois.
  - Aucun point d'intersection
    Si $\Delta(a) < 0$ soit :
    $$\Delta(a) < 0 \iff a \in \left]-\infty\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,+\infty\right[$$
    Alors l'équation n'admet aucune solution. La droite et le cercle n'ont pas de point d'intersection.
  - Deux points d'intersection
    Si $\Delta(a) > 0$ soit :
    $$\Delta(a) > 0 \iff a \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$$
    Alors l'équation admet deux solutions. La droite et le cercle ont deux points d'intersection.

Exercice 3. Fonctions — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\,e^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$. Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$. On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

Pour tout réel x différent de 0,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

Or :

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- (2) : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$
- (3) : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

Donc par composition des limite :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} X^2 = +\infty \end{array}\right. \Bigg| \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

Puis

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} = 0 \end{array}\right. \Bigg| \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}} = 0$$

On en déduit donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0 \end{array}\right. \Bigg| \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}}$$

2. 2. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \left(1 - 2x^2\right)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

$$f : \left\{\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x \times \mathrm{e}^{1-x^2} \end{array}\right.$$

La fonction f est dérivable d'après les données. La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}\;;\; f(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \left\{\begin{array}{lcl} u(x) = x & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} & ; & v'(x) = \left(-2x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{1-x^2} + x \times \left(-2x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{1-x^2} - 2x^2\,\mathrm{e}^{1-x^2} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\;;\; f'(x) = \left(1 - 2x^2\right)\,\mathrm{e}^{1-x^2}}$$

2. b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

On a montré que pour tout réel x, la dérivée de f s'exprime sous la forme d'un produit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f'(x) = \left(1 - 2x^2\right) \mathrm{e}^{\,1-x^2}$$

Par stricte positivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, la dérivée est du signe du facteur $(1 - 2x^2)$ dont l'étude de signe est aisée.

$$\left.\begin{vmatrix} f'(x) > 0 \iff x \in \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\\ f'(x) = 0 \iff x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}\right\} \Longrightarrow \; f'(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$$

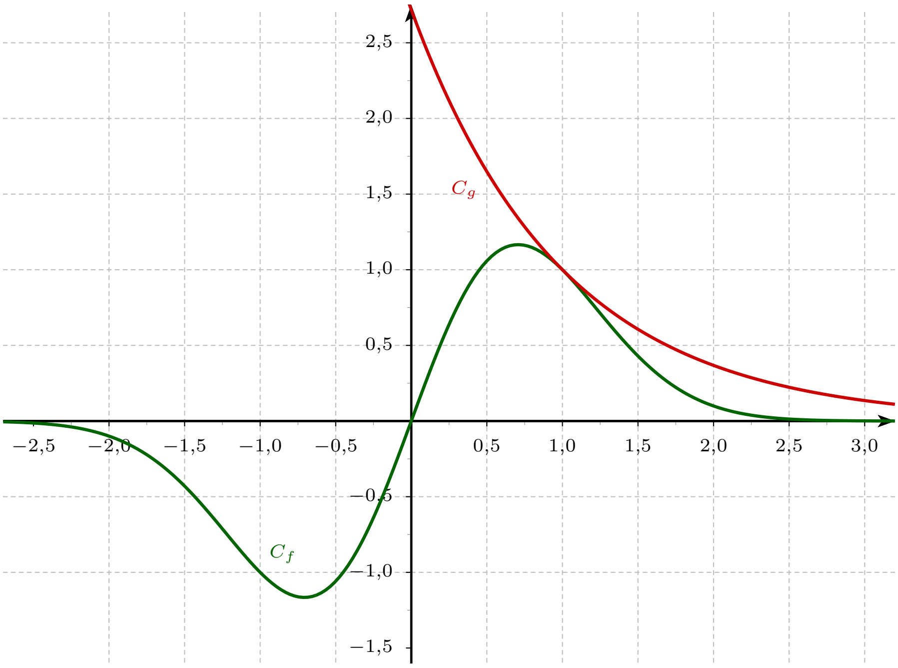
On obtient donc avec les résultats des limites de la question **(A.1.)** et :

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -1.17 \text{ et } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.17$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -1.17$	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.17$	$\searrow$	0

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{\,1-x}$. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g. Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.



1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

Le but annoncé de cette partie étant d'étudier la position relative des deux courbe, une conjecture possible est que la courbe de la fonction g semble être au dessus de celle de fa fonction f.

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.

On rappelle que pour tout réel x :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\,1-x^2} \text{ et } g(x) = \mathrm{e}^{\,1-x}$$

Pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$ on a :

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \mathrm{e}^{\,1-x} - x\,\mathrm{e}^{\,1-x^2} \\ &= \mathrm{e}^{\,1-x} + \left(-x\,\mathrm{e}^{\,1-x^2}\right) \end{aligned}$$

Or puisque l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ on a pour tout réel $x \in]-\infty\ ;\ 0]$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\,1-x} > 0 \\ \mathrm{e}^{\,1-x^2} > 0 \\ -x \geq 0 \end{array}\right. \;\Bigg|\; \Longrightarrow g(x) - f(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{\,1-x}}_{\in\mathbb{R}_+^*} + \underbrace{\left(-x\,\mathrm{e}^{\,1-x^2}\right)}_{\in\mathbb{R}_+} > 0$$

L'expression $g(x) + (-f(x))$ est donc la somme d'un terme strictement positif et d'un terme positif sur cet intervalle. Elle est donc strictement positive et on a montré que :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty\ ;\ 0]\ ;\ f(x) < g(x)}$$

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On pose, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

3. a. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$.
On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) \leq g(x) \iff x\,\mathrm{e}^{\,1-x^2} \leq \mathrm{e}^{\,1-x}$$

On compose alors par la fonction ln définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (l'ordre est inchangé) :

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\iff \ln\left(x \times \mathrm{e}^{\,1-x^2}\right) \leq \ln \mathrm{e}^{\,1-x} \\ &\iff \ln x + \ln\left(\mathrm{e}^{\,1-x^2}\right) \leq 1 - x \\ &\iff \ln x + 1 - x^2 \leq 1 - x \\ &\iff \underbrace{\ln x - x^2 + x}_{\Phi(x)} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0}$$

3. b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Sa dérivée s'exprime facilement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ \Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$$

Le dénominateur étant strictement positif sur l'intervalle d'étude donc Φ' est du signe de son numérateur $(-2x^2 + x + 1)$.

L'expression $\left(-2x^2 + 1x + 1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}\right. \;\Bigg|\; \Longrightarrow \Delta = 9 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-2x^2 + 1x + 1\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-4} = -0.5$$

Donc Φ' du signe de $a = -2$ à l'extérieur des racines $-0,5$ et 1 soit sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, :

$$\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$$

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	

3. c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
D'après l'étude menée lors de la question **(B.3.b)** , le maximum de la fonction Φ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est 0. De ce fait, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4. 4. a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

- D'après la question **(B.3.a.)**
$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0$$
Ainsi d'après le résultat de la question **(B.3.c)** la courbe de f est bien toujours en dessous de celle de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a prouvé lors de la question **(B.2.)** que :
$$\forall x \in]-\infty\ ;\ 0]\ ;\ f(x) < g(x)$$
La courbe de f est bien toujours en dessous de celle de g sur $\mathbb{R}_-$.
- Pour conclure : la courbe de f est bien toujours en dessous de celle de g sur $\mathbb{R}$. La conjecture de la question **(B.1.)** est donc valide.

4. b. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

- Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$, on a montré lors de la question **(B.2.)** que $f(x) < g(x)$ donc les deux courbes n'ont pas de point commun sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a montré lors de la question **(B.3.)** que $f(x) \leq g(x)$.
- Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a admis que $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow \Phi(x) = 0$. Or sur cet intervalle
$$\Phi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$
Les deux courbes ont un unique point commun, le point A d'abscisse 1.

4. c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.
On rappelle que sur $\mathbb{R}$ on a :
$$f'(x) = (1 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2} \text{ et } g'(x) = -\,\mathrm{e}^{1-x}$$
Au point A d'abscisse 1 les coefficient directeur des tangente à la courbe de f et à celle de g sont respectivement :
$$f'(1) = -1\,\mathrm{e}^0 = -1 \text{ et } g'(1) = -1\,\mathrm{e}^0 = -1$$
Ces deux droites ont le même coefficient directeur et passe par le même point A, elles sont donc elles sont identiques.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$, expression que l'on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{-2} \times (-2x) \times \mathrm{e}^{1-x^2} = \frac{1}{-2} \times u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 1 - x^2 \\ u'(x) = -2x \end{cases}$$

Or une primitive de $u'\,\mathrm{e}^{u}$ est e^u donc une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{1-x^2}}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$.

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Un primitive de $x \longmapsto e^{1-x}$ est $x \longmapsto -e^{1-x}$ soit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x &= \left[\ -e^{1-x}\ \right]_0^1 - \left[\ F(x)\ \right]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^0 + \mathrm{e} - F(1) + F(0) \\ &= -1 + \mathrm{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1)}$$

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

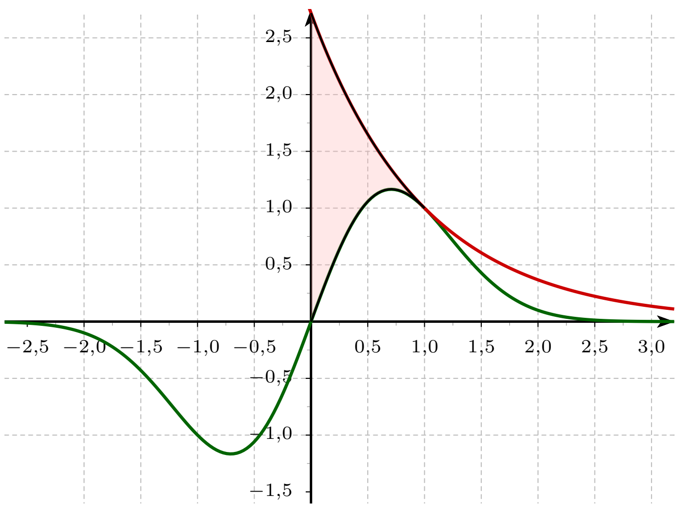
On remarque bien sûr que :

$$\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Or on a montré dans la partie **(B.)** que sur l'intervalle [0 ; 1], la courbe de g est au dessus de celle de g et donc que la différence $g(x) - f(x)$ était positive.

$$\forall x \in [0;1]\ ;\ g(x) - f(x) \geq 0$$

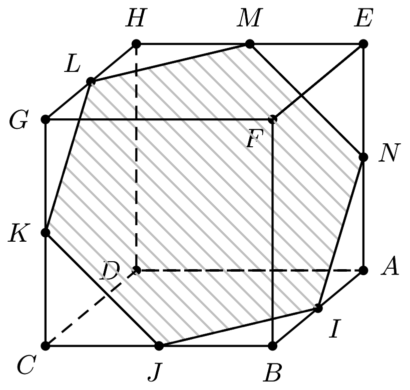
De ce fait, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les courbe C_g, C_f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.



Exercice 4. Obligatoire - Espace 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH})$.
Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$,
$H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.
Soit I le milieu de $[AB]$. Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I. On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.



1.

1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

Dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH})$ on a :

$$\begin{cases} D(0\,;\,0\,;\,0)\\ F(1\,;\,1\,;\,1)\\ B(1\,;\,1\,;\,0)\\ G(1\,;\,0\,;\,1)\\ E(0\,;\,1\,;\,1)\end{cases} \Bigg| \Longrightarrow \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\,;\,\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\,;\,\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0-1+1=0\Longrightarrow\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{BG}$$

Et

$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-1+0+1=0\Longrightarrow\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{BE}$$

Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est donc orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE), $\underline{\overrightarrow{DF}\text{ est donc normal au plan }(BGE)}$.

1. b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Le point I est le milieu de $[AB]$ donc ses coordonnées sont les moyennes de celles des points A et B soit :

$$\begin{cases} A(0\,;\,1\,;\,0)\\ B(1\,;\,1\,;\,0)\end{cases} \Longrightarrow I\,(0,5\,;\,1\,;\,0)$$

Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (BGE) et passe par le point I. C'est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{DF}$ et passant par I, soit :

Propriété 2

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{u}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\,.\,\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 2 :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (BGE) \iff \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-0,5 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} . \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (BGE) \iff (x-0,5)+(y-1)+z=0$$
$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (BGE) \iff x+y+z-1,5=0$$

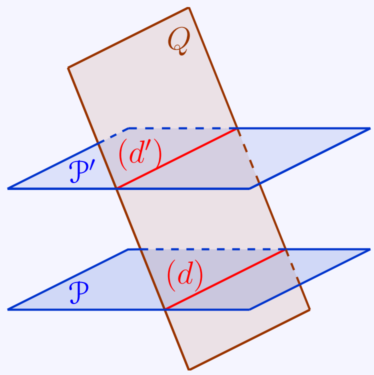
$$\boxed{(BGE)\ :\ x+y+z-1,5=0}$$

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

- **Méthode 1 : géométrique**

Théorème 2 (Parallélisme de deux droites)

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles, tout plan $\mathcal{Q}$ qui coupe le plan $\mathcal{P}$, coupe aussi le plan $\mathcal{P}'$ et les droites d'intersection (d) et (d') sont parallèles.



Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (BGE) et ces deux plan coupent la face latérale $(ABFE)$ en deux droites (NI) et (BE). Ces deux droites sont donc parallèles d'après le théorème 2.
On se place alors dans le triangle ABE. Les droites (BE) et (NI) sont parallèles et le point I est le milieu du segment [AB], donc d'après le théorème des milieux, le point N est le milieu du segment $[AE]$.

- **Méthode 2 : par le calcul**
Le point N appartient au segment [AE]. Ses coordonnées sont donc $(0\ ;\ 1\ ;\ z_N)$. Par ailleurs, il appartient au plan $\mathcal{P}$ donc
$$0+1+z_N-1,5=0 \iff z_N=0,5$$
De ce fait le point N est le milieu du segment [AE].

3. 3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

$$\begin{cases} H(0\ ;\ 0\ ;\ 1) \\ B(1\ ;\ 1\ ;\ 0) \end{cases} \Bigg| \implies \overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La droite (HB) passant par le point $H(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{HB}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{HM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{HB}$. On a alors :

$$(HB) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = t\ \overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (HB) est donc :

$$\boxed{(HB)\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases} \quad ,\ t \in \mathbb{R}}$$

3. b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

On a :

$$\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1+1-1=1$$

Donc la droite (HB) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{DF}$. Cherchons leur point d'intersection.

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(HB)\cap\mathcal{P}\iff\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-t+1\\x+y+z-1,5=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-t+1\\t+t+(-t+1)-1,5=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-t+1\\t=0,5\end{cases}\iff\begin{cases}x=0,5\\y=0,5\\z=0,5\\t=0,5\end{cases}$$

La droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point $\boxed{T\,(0,5\,;\,0,5\,;\,0,5)}$.

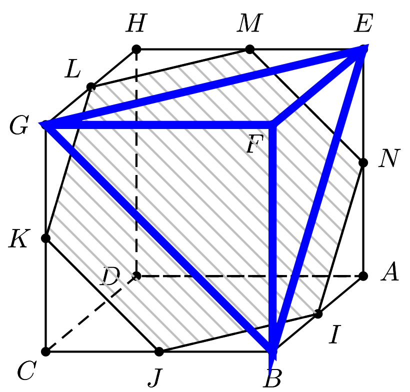
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

Le tétraèdre $FBGE$ est de base, le triangle FNG rectangle en F, et de hauteur associée [FE] qui est perpendiculaire à la base.
Les arêtes du cube étant de longueur 1 on a :

$$\mathcal{A}_{(FGE)}=\frac{FG\times FB}{2}=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

et donc puisque $FE=1$ on a

$$\boxed{\mathcal{V}_{(FBGE)}=\frac{\mathcal{A}_{(FGE)}\times FE}{3}=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{3}=\frac{1}{6}\quad u.v.}$$



Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs : $7x - 3y = 1$ (E).

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\ ;\ y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1) Pour Y variant de −5 à 10
                      (2) Si 7X − 3Y = 1
                          Alors Afficher X et Y
                          Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2.

2. a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

Pour $x = 1$ et $y = 2$ on a

$$7x - 3y = 7 \times 1 - 3 \times 2 = 7 - 6 = 1$$

Donc le couple $\underline{(1\ ;\ 2) \text{ est une solution de } (E)}$.

2. b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Une solution particulière est : $(1\ ;\ 2)$

- **Transformation de l'équation**

$$(E)\ :\ 7x - 3y = 1$$

Puisque le couple $(1\ ;\ 2)$ est une solution particulière de l'équation (E) on a : $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$.
Donc

$$\begin{cases} 7 \times x & - & 3 \times y & = 1 \\ 7 \times 1 & - & 3 \times 2 & = 1 \end{cases} \underset{\text{par soustraction}}{\Longrightarrow} 7(x-\ 1) - 3(y-\ 2) = 0$$

Donc l'équation (E) devient :

$$(E)\ :\ 7(x-\ 1) = 3(y-\ 2)$$

- **Application du théorème de Gauss**

Théorème 3 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

Soit a, b, c des entiers.

Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c.

Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

$$(E)\ :\ 7(x-\ 1) = 3(y-\ 2)$$

Puisque 7 et 3 sont premiers entre eux, alors en appliquant le théorème de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{l} 7 \text{ divise le produit } 3(y-2) \\ 7 \text{ et } 3 \text{ sont premiers entre eux} \end{array}\right. \underset{\text{d'après le th. de Gauss}}{\Longrightarrow} 7 \text{ divise } (y-2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3 \text{ divise le produit } 7(x-1) \\ 7 \text{ et } 3 \text{ sont premiers entre eux} \end{array}\right. \underset{\text{d'après le th. de Gauss}}{\Longrightarrow} 3 \text{ divise } (x-1)$$

Il existe donc des entiers k et k' tels que :

$$\left\{\begin{array}{ll} (y-2) & = 7k \\ (x-1) & = 3k' \end{array}\right.$$

En reportant dans l'équation (E) on obtient

$$7 \times 3k' = 3 \times 7k \Longleftrightarrow k = k'$$

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme

$$\boxed{\left(1+3k \ ; \ 2+7k\right) \ ; \ k \in \mathbb{Z}}$$

2. c. Déterminer l'ensemble des couples $(x \ ; \ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

L'ensemble des couples $(x \ ; \ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$ sont donc :

- Pour $k=-1$, le couple $(x=-2 \ ; \ y=-5)$. On a bien : $7 \times (-2) - 3 \times (-5) = 1$;
- Pour $k=0$, le couple $(x=1 \ ; \ y=2)$. On a bien : $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$;
- Pour $k=1$, le couple $(x=4 \ ; \ y=9)$. On a bien : $7 \times 4 - 3 \times 9 = 1$;

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $7x-3y-1=0$. On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n \ : \ y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lll} x_{n+1} & = & -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} & = & -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right.$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

$$\boxed{MX_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\dfrac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = X_{n+1}}$$

1. b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

Pour tout entier naturel n,

$$\boxed{X_n = M^n X_0}$$

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

2. b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

Pour tout entier naturel n,

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}}$$

2. c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(\mathcal{P}_n) \ : \ M^n = PD^nP^{-1}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat $(\mathcal{P}_0)$ est vrai puisque :
  $$M^0 = Id \text{ et } PD^0P^{-1} = P \times Id \times P^{-1} = PP^{-1} = Id$$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  $$M^{n+1} = M \times M^n$$
  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifié et donc que $M^n = PD^nP^{-1}$
  $$M^{n+1} = M \times PD^nP^{-1}$$
  En oute par définition de D on a $P^{-1}MP \iff M = PDP^{-1}$ soit :
  $$\begin{aligned} M^{n+1} &= PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} \\ M^{n+1} &= PD \underbrace{\left(P^{-1}P\right)}_{Id} D^nP^{-1} \\ M^{n+1} &= P \underbrace{\left(D \times Id \times D^n\right)}_{D^{n+1}} P^{-1} \\ M^{n+1} &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
  On a alors montré que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ et donc que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat $(\mathcal{P}_n)$ vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{M^n = PD^nP^{-1}}$$

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

On a pour tout entier n, $X_n = M^nX_0$ donc :

$$\boxed{\begin{cases} x_n = -14 + \dfrac{15}{2^n} + 12 - \dfrac{12}{2^n} \\ y_n = -35 + \dfrac{35}{2^n} + 30 - \dfrac{28}{2^n} \end{cases}}$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} 7x_n - 3y_n - 1 &= -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $7x - 3y = 1$.