

Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie
2 mars 2015

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1,5; 6]$ par : $f(x) = (25x - 32)e^{-x}$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

On donne $f'(x) = (57 - 25x)e^{-x}$ et $f''(x) = (25x - 82)e^{-x}$.

1. a. On sait que $f'(x) = (57 - 25x)e^{-x}$ et que $e^{-x} > 0$ pour tout x ; donc $f'(x)$ est du signe de $57 - 25x$:

x	1,5	$\frac{57}{25}$	6
$f'(x)$	+	0	-

- b. $f(1,5) = 5,5e^{-1,5} \approx 1,23$; $f\left(\frac{57}{25}\right) = 25e^{-\frac{57}{25}} \approx 2,56$ et $f(6) = 118e^{-6} \approx 0,29$

D'où le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1,5; 6]$:

x	1,5	$\frac{57}{25}$	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1,23	2,56	0,29

2. Un point d'inflexion est un point où la courbe représentant la fonction traverse sa tangente; la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule et change de signe en x_0 .

On sait que $f''(x) = (25x - 82)e^{-x}$. Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $25x - 82$ qui s'annule et change de signe pour $x = \frac{82}{25}$.

Sur l'intervalle $[1,5; 6]$, la courbe C admet donc un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{82}{25}$.

3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.

- a. On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	1,5	$\frac{57}{25}$	α	6
$f(x)$	1,23	2,56	1	0,29

D'après le tableau de variation de f , on peut dire que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1,5; 6]$ et que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{57}{25}; 6\right]$.

Or $f(4) \approx 1,25 > 1$ et $f(5) \approx 0,63 < 1$, donc $4 < \alpha < 5$.

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution unique α sur l'intervalle $[4; 5]$.

- b. On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[4; 5]$:

Initialisation
 a prend la valeur 4
 b prend la valeur 5
Traitement
 Tant que $b - a > 0,1$ faire
 y prend la valeur $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
 Si $y > 1$ alors
 a prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
 Sinon b prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
 Fin de Tant que
Sortie
 Afficher $\frac{a+b}{2}$

Il s'agit d'une recherche de valeurs approchées de solutions d'équation par dichotomie.

On exécute l'algorithme et on complète le tableau :

	$\frac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1 ^{re} boucle « Tant que »	4,5	0,894	4	4,5	0,5	
2 ^e boucle « Tant que »	4,25	1,059	4,25	4,5	0,25	Non
3 ^e boucle « Tant que »	4,375	0,974	4,25	4,375	0,125	Non
4 ^e boucle « Tant que »	4,3125	1,016	4,3125	4,375	0,0625	Oui

- c. D'après les calculs précédents :
 $f(4,3125) \approx 1,016 > 1$ et $f(4,375) \approx 0,974 < 1$ donc $4,3125 < \alpha < 4,375$.
 On peut donc dire que 4,3 est une valeur approchée de α au dixième.
 Le solveur d'une calculatrice donne 4,336 comme valeur approchée de α .

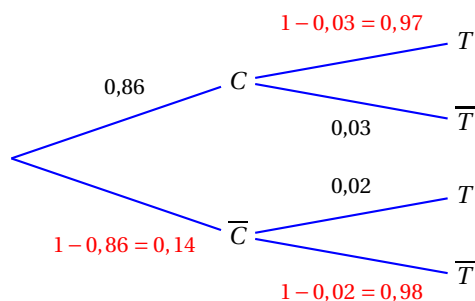
EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : sélection des pommes

On peut représenter la situation décrite dans le texte par un arbre pondéré :



- L'événement « la pomme prélevée est conforme et est acceptée par la machine » correspond à l'événement $C \cap T$.
 D'après l'arbre pondéré : $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,86 \times 0,97 = 0,8342$
- D'après la formule des probabilités totales :
 $P(T) = P(C \cap T) + P(C \cap \bar{T}) = 0,86 \times 0,97 + 0,14 \times 0,02 = 0,8342 + 0,0028 = 0,837$

3. Une pomme prélevée est acceptée par la machine. L'événement « la pomme est conforme sachant qu'elle est acceptée par la machine » est l'événement $P_T(C)$.

$$P_T(C) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{0,8342}{0,837} \approx 0,997$$

Partie B : contrôle d'un fournisseur

On formule l'hypothèse que 86 % des pommes de ce fournisseur sont conformes donc $p = 0,86$.

1. Pour une proportion p et un échantillon de taille n , l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la fréquence des pommes conformes dans un échantillon de taille 80 est :

$$I = \left[0,86 - 1,96 \frac{\sqrt{0,86(1-0,86)}}{\sqrt{80}} ; 0,86 + 1,96 \frac{\sqrt{0,86(1-0,86)}}{\sqrt{80}} \right] \approx [0,783 ; 0,937]$$

2. L'entreprise a constaté que seulement 65 pommes de l'échantillon étaient conformes.

La fréquence observée de pommes conformes est donc $f = \frac{65}{80} = 0,8125$.

Cette fréquence appartient à l'intervalle I donc il n'y a pas lieu, au vu de l'échantillon étudié, de remettre en cause l'hypothèse selon laquelle 86 % des pommes sont conformes.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0,5; 5]$ par : $g(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$.

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.

Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ .

1. Le point A d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 ; son abscisse est solution de l'équation $g(x) = 0$. On résout sur $[0,5; 5]$ l'équation $g(x) = 0$:

$$g(x) = 0 \iff \frac{2\ln(x) + 1}{x} = 0 \iff 2\ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}}$$

De plus $e^{-\frac{1}{2}} \in [0,5; 5]$. Les coordonnées de A sont donc $(e^{-\frac{1}{2}}; 0)$.

2. a. On calcule la dérivée de la fonction g sur $[0,5; 5]$:

$$g'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - (2\ln(x) + 1) \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln(x) - 1}{x^2} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$$

- b. Sur $[0,5; 5]$ $x^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$:

$$1 - 2\ln(x) > 0 \iff \frac{1}{2} > \ln(x) \iff e^{\frac{1}{2}} > x \text{ donc}$$

$$g'(x) > 0 \text{ sur } \left[0,5; e^{\frac{1}{2}}\right], g'(e^{\frac{1}{2}}) = 0 \text{ et } g'(x) < 0 \text{ sur } \left[e^{\frac{1}{2}}; 5\right]$$

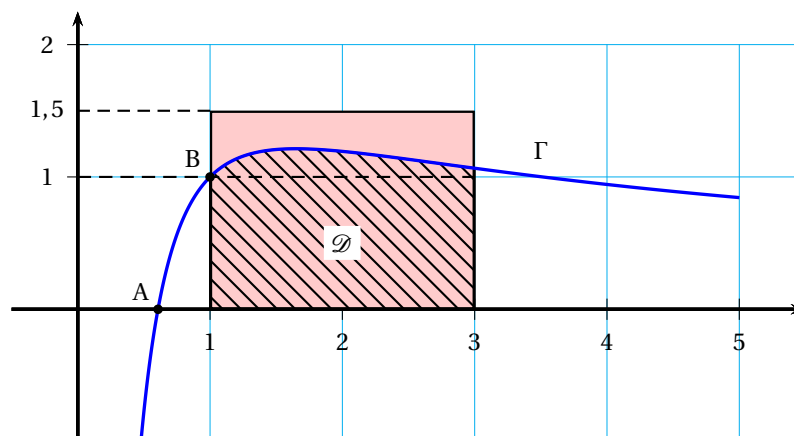
- c. On peut en déduire les variations de la fonction g sur $[0,5; 5]$:

- la fonction g est strictement croissante sur $\left[0,5; e^{\frac{1}{2}}\right]$,
- elle admet un maximum en $x = e^{\frac{1}{2}}$ et
- elle est strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}; 5\right]$

3. Il est dit dans le texte que la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ ; la droite (OB) passe par le point O et le point B d'abscisse 1 et d'ordonnée $g(1) = 1$. Donc son équation est $y = x$.

La tangente à la courbe Γ en B a pour équation $y = x$.

4. a. On note \mathcal{D} le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.



Par lecture graphique, on peut voir que l'aire du domaine \mathcal{D} est comprise entre 2 et 3 unités d'aire.

- b. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0,5; 5]$ par $G(x) = \ln(x) [\ln(x) + 1]$.

$$G'(x) = \frac{1}{x} [\ln(x) + 1] + \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) + 1}{x} = g(x) \text{ donc } G \text{ est une primitive de } g \text{ sur } [0,5; 5].$$

- c. La fonction g est dérivable et strictement positive sur $[1; 3]$ donc l'aire du domaine \mathcal{D} est égale à

$$\int_1^3 g(t) dt = G(3) - G(1) = \ln(3) (\ln(3) + 1) - \ln(1) (\ln(1) + 2) = \ln(3)^2 + \ln(3) \text{ unités d'aire.}$$

EXERCICE 4

5 points

Enseignement obligatoire

Dans une grande entreprise, les commerciaux ont le choix de services de téléphonie mobile exclusivement entre deux opérateurs concurrents : A et B.

1. On sait que 18 % des abonnés à l'opérateur A changent d'abonnement en fin d'année, donc il en reste 82 %.

On sait que 22 % des abonnés de l'opérateur B passent chez A l'année suivante.

Donc le nombre u_{n+1} d'abonnés à l'opérateur A l'année $n+1$ est constitué des 82 % des abonnés de l'opérateur A l'année n , ce qui fait $0,82u_n$, et des 22 % d'abonnés de l'opérateur B qui passent chez A, ce qui fait $0,22v_n$.

$$\text{Donc } u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n$$

De plus, comme les commerciaux sont abonnés exclusivement chez les opérateurs A et B on peut dire que $u_n + v_n = 1$.

2.
$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22v_n \\ u_n + v_n = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow u_{n+1} = 0,82u_n + 0,22(1 - u_n) = 0,82u_n + 0,22 - 0,22u_n = 0,6u_n + 0,22$$

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout n par $w_n = u_n - 0,55$; donc $u_n = w_n + 0,55$.

a. Pour tout n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 0,55 &&= 0,6u_n + 0,22 - 0,55 \\ &= 0,6(w_n + 0,55) - 0,33 &&= 0,6w_n + 0,33 - 0,33 \\ &= 0,6w_n \end{aligned}$$

$$w_0 = u_0 - 0,55 = 0,4 - 0,55 = -0,15; \text{ on peut donc dire que}$$

la suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = -0,15$ et de raison $q = 0,6$.

- b. La suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = -0,15$ et de raison $q = 0,6$ donc, pour tout n : $w_n = w_0 \times q^n = -0,15 \times (0,6)^n$.

c. Pour tout n , $u_n = w_n + 0,55$ et $w_n = -0,15 \times (0,6)^n$, donc $u_n = 0,55 - 0,15 \times (0,6)^n$.

4. En calculant $u_{10} \approx 0,549$, $u_{20} \approx 0,54999$ et $u_{30} \approx 0,54999997$, on peut conjecturer que la suite (u_n) a pour limite 0,55.

C'est un résultat du cours : une suite géométrique ayant une raison q telle que $0 \leq q < 1$, a pour limite 0. Donc la suite (w_n) a pour limite 0 et donc la suite (u_n) a pour limite 0,55.

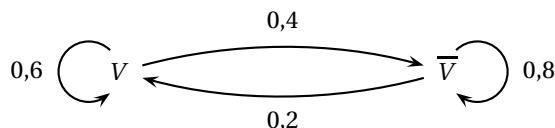
Le terme u_n désigne la proportion de commerciaux qui disposent d'un abonnement chez l'opérateur A; cette proportion va donc tendre vers 55 %.

EXERCICE 4**5 points****Enseignement de spécialité**

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

Partie A

1. On représente la situation décrite dans le texte par un graphe probabiliste de sommets V et \bar{V} :



2. D'après le texte on peut dire que
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,2y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

ce qui équivaut à : $(x_{n+1} \quad y_{n+1}) = (x_n \quad y_n) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

La matrice de transition est donc $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. $P_1 = (0,05 \quad 0,95)$ donc

$$P_2 = P_1 \times M = (0,05 \quad 0,95) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= (0,05 \times 0,6 + 0,95 \times 0,2 \quad 0,05 \times 0,4 + 0,95 \times 0,8) = (0,22 \quad 0,78)$$

4. On admet que le taux de visites se stabilise à long terme.

Soit S la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; elle peut correspondre à un état du système car $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

$$S \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,2 \quad \frac{1}{3} \times 0,4 + \frac{2}{3} \times 0,8 \right) = \left(\frac{0,6}{3} + \frac{0,4}{3} \quad \frac{0,4}{3} + \frac{1,6}{3} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable du système.

Partie B

1. On veut parcourir le réseau proposé dans cette partie en empruntant chaque arête une et une seule fois ; autrement dit on cherche une chaîne eulérienne dans ce graphe.

On note les degrés de chaque sommet :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	3	4	2	4	6	4	3	2

Il y a exactement deux sommets de degrés impairs dans ce graphe, B et H, donc on peut réaliser des parcours empruntant chaque fibre optique une fois et une seule, partant du routeur B pour se terminer au routeur H, ou partant du routeur H pour se terminer au routeur B.

2. On va chercher, au moyen de l'algorithme de Dijkstra le parcours le plus court reliant A à I :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	30 (A)	30 (A)	20 (A)	∞	50 (A)	∞	∞	∞	D
	30 (A)	30 (A)		∞	50 (A) 60 (B)	∞	∞	∞	B
		30 (A) 50 (B)		40 (B)	50 (A)	∞	∞	∞	C
				40 (B) 70 (C)	50 (A) 70 (C)	∞	∞	∞	E
					50 (A) 80 (E)	80 (E)	∞	∞	F
						80 (E) 60 (F)	80 (F)	∞	G
							80 (F) 90 (G)	70 (G)	I

Le chemin le plus court pour relier A à I est : $A \xrightarrow{50} F \xrightarrow{10} G \xrightarrow{10} I$

Donc le paquet de données qui a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I a emprunté le chemin le plus rapide.