Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 16 avril 2015

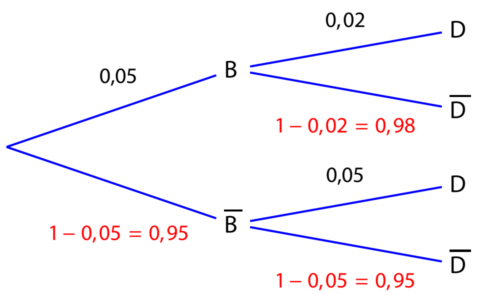
Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On appelle
- B l'événement « la batterie est défectueuse » ;
- D l'événement « le disque dur est défectueux ».

On représente la situation décrite dans le texte par un arbre pondéré :



Proposition 1 – Fausse
La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.

L'événement « le micro n'a ni problème de batterie ni problème de disque dur » est $\overline{B}\ \ \overline{D}$.
D'après l'arbre : $P\left(\overline{B}\ \ \overline{D}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}\left(\overline{D}\right) = 0{,}95 \times 0{,}95 = 0{,}9025 \neq 0{,}08$

Proposition 2 – Vraie
La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485.

On cherche $P(D)$. D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(B\ \ D) + P\left(\overline{B}\ \ D\right) = 0{,}05 \times 0{,}02 + 0{,}95 \times 0{,}05 = 0{,}0010 + 0{,}0475 = 0{,}0485$

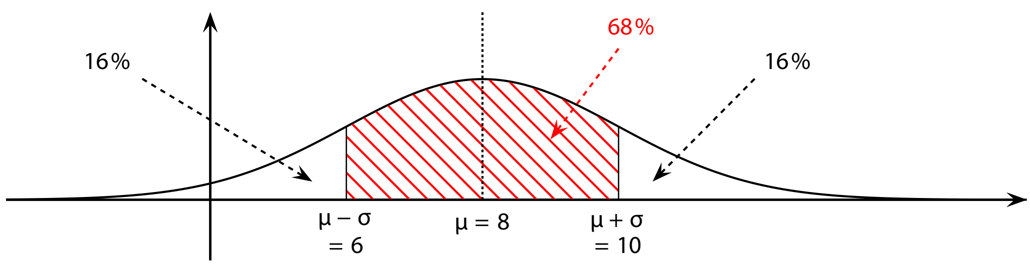
Proposition 3 – Fausse
Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

On cherche $P_D(B)$: $P_D(B) = \dfrac{P(B\ \ D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}02}{0{,}0485} \approx 0{,}0206 > 0{,}02$

Partie B

Proposition 4 – Vraie
La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à 0,2.

La variable aléatoire X qui donne l'autonomie de la batterie suit la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2$. On cherche $P(X \geqslant 10)$.
$\mu = 8$ et $\sigma = 2$ donc $10 = \mu + \sigma$.
D'après le cours, on sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$ et pour des raisons de symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, on peut déduire que $P(X \leqslant \mu - \sigma) = P(X \geqslant \mu + \sigma) \approx \dfrac{1 - 0{,}68}{2} \approx 0{,}16$.
Donc $P(X \geqslant 10) \approx 0{,}16 < 0{,}2$.



Partie C

Proposition 5 – **Fausse**
Ce test, réalisé sur ces 1 000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.
Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $p=0,98$ et $n=1000$.
Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95% donnant le pourcentage de clés USB conformes dans un échantillon de taille 1 000 est :

$$I=\left[0,98-1,96\frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0,98+1,96\frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1000}}\right]\approx[0,97\,;\,0,99]$$

Sur 1 000 clés, il y en a 50 de défectueuses donc la fréquence de clés conformes dans ce lot est $f=\dfrac{1000-50}{1000}=0,95$. Or $f\notin I$, donc il faut remettre en question la communication de l'entreprise.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

1. **a.** On recopie et on complète le tableau correspondant à l'algorithme donné dans le texte :

Test $C<400$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411	
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

   b. La valeur affichée en sortie d'algorithme est 5. Cela veut dire que pour l'année 5, c'est-à-dire en 2019, le nombre de colonies dépasse pour la première fois 400.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014+n$.
   Ainsi $C_0=300$ est le nombre de colonies en 2014.

   a. D'une année sur l'autre, l'apiculteur perd 8 % de colonies donc il en reste 92 %. De plus, il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps donc le nombre de colonies l'année $n+1$ est le nombre de colonies l'année n multiplié par 0,92 auquel on va ajouter 50 :
   pour tout n, $C_{n+1}=0,92\times C_n+50$

   b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n=625-C_n$; donc $C_n=625-V_n$.
   $V_{n+1}=625-C_{n+1}=625-0,92\times C_n-50=575-0,92\times(625-V_n)=575-575+0,92\times V_n$
   $=0,92\times V_n$

   c. D'après la question précédente, on peut déduire que la suite (V_n) est géométrique de raison $q=0,92$ et de premier terme $V_0=625-C_0=325$.
   Donc, pour tout n, $V_n=V_0\times q^n=325\times 0,92^n$.
   Comme $C_n=625-V_n$, on peut dire que, pour tout n, $C_n=625-325\times 0,92^n$.

   d. Le mois de juillet 2024 correspond à $n=10$; l'apiculteur peut espérer posséder C_{10} colonies soit : $C_{10}=625-325\times 0,92^{10}\approx 484$ colonies.

3. **a.** Pour doubler le nombre initial de colonies, il faut atteindre au moins 600 colonies ; il suffit donc de remplacer dans l'algorithme la ligne « Tant que $C<400$ faire » par la ligne « Tant que $C<600$ faire ».

   b. On cherche une valeur de n pour laquelle $C_n\geqslant 600$:

$$C_n\geqslant 600 \iff 625-325\times 0,92^n\geqslant 600 \iff 25\geqslant 325\times 0,92^n \iff \frac{25}{325}\geqslant 0,92^n$$
$$\iff \ln\left(\frac{25}{325}\right)\geqslant \ln\left(0,92^n\right) \iff \ln\left(\frac{25}{325}\right)\geqslant n\times\ln(0,92) \iff \frac{\ln\left(\frac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)}\leqslant n$$

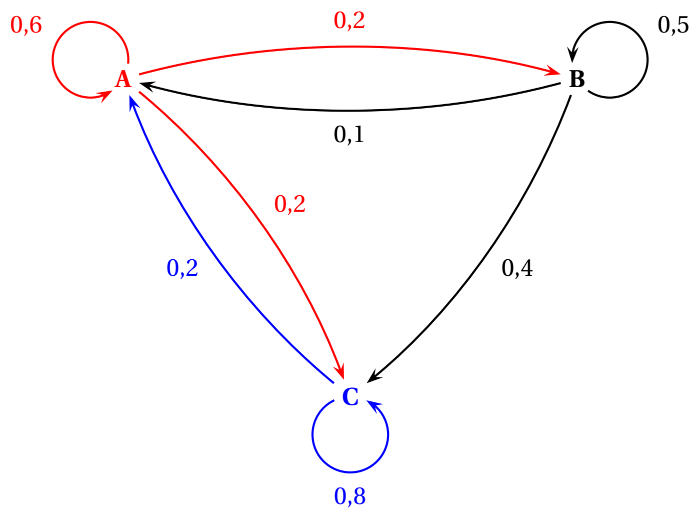
Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)} \approx 30,8$ donc au bout de 31 années, le nombre de colonies aura doublé.

Vérification : $C_{30} \approx 598$ *et* $C_{31} \approx 600$

Exercice 2 **5 points**

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets A, B et C :



2. Si a_n, b_n et c_n sont respectivement les nombres de visiteurs sur les sites A, B et C à l'instant $t = n$, d'après le graphe, on aura :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} &=& 0,6a_n &+& 0,1b_n &+& 0,2c_n\\ b_{n+1} &=& 0,2a_n &+& 0,5b_n &+& 0c_n\\ c_{n+1} &=& 0,2a_n &+& 0,4b_n &+& 0,8c_n\end{array}\right. \iff \begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,1 & 0,5 & 0,4\\ 0,2 & 0 & 0,8\end{pmatrix}$$

Donc la matrice de transition associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix}0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,1 & 0,5 & 0,4\\ 0,2 & 0 & 0,8\end{pmatrix}$

On donne $M^2 = \begin{pmatrix}0,42 & 0,22 & 0,36\\ 0,19 & 0,27 & 0,54\\ 0,28 & 0,04 & 0,68\end{pmatrix}$ et $M^{20} \approx \begin{pmatrix}0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\end{pmatrix}$.

3. $N_2 = N_1 \times M = N_0 \times M \times M = N_0 \times M^2 = \begin{pmatrix}100 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,42 & 0,22 & 0,36\\ 0,19 & 0,27 & 0,54\\ 0,28 & 0,04 & 0,68\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}42 & 22 & 36\end{pmatrix}$

   On peut donc dire que, lors de la deuxième minute, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

4. $N_0 \times M^{20} = N_{20} \approx \begin{pmatrix}100 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix}$

   On peut conjecturer que l'état stable est $\begin{pmatrix}31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix}$.

   Ce que l'on peut vérifier simplement car $\begin{pmatrix}31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix}31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix}$.

   À long terme, il y aura en moyenne 31,25 internautes connectés sur le site A, 12,5 sur le site B et 56,25 sur le site C.

5. À l'instant $t = 0$, le site C est infecté.

   a. La probabilité de passer du site C au site A en une minute est de 0,2 ; la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est donc égale à 0,2.

b. Pour qu'en deux minutes les trois sites soient infectés, il faut aller de C vers A puis vers B, ou de C vers B puis vers A.

C'est impossible d'aller de C vers B.

On va de C vers A avec une probabilité de 0,2 et de A vers B avec une probabilité de 0,2 ; on va donc de C vers A puis vers B avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.

La probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés est donc égale à 0,04.

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

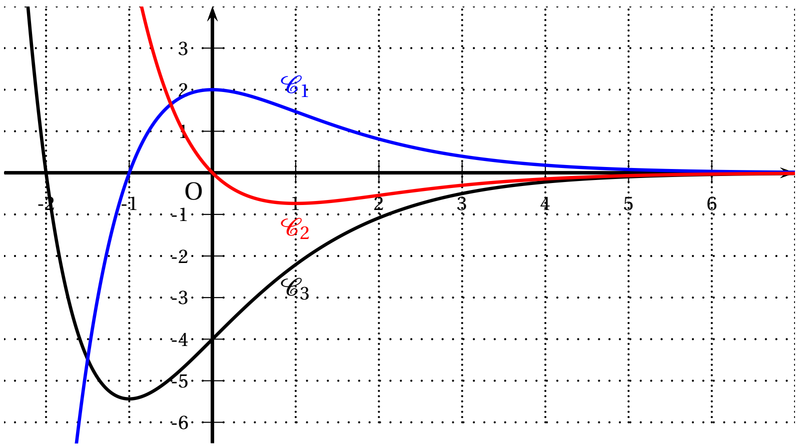
On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$

Partie A

1. $f(-1) = -2(-1+2)\,\mathrm{e}^{-(-1)} = -2\,\mathrm{e} \approx -5,44$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
   $f'(x) = -2(1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2(x+2)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-2+2x+4)\,\mathrm{e}^{-x} = 2(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$ sur $\mathbb{R}$.
   - Si $x < -1$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$;
   - Si $x > -1$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$;
   - $f'(-1) = 0$ et f admet un minimum en -1 égal à $f(-1) = -2\,\mathrm{e}$.

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous, trois courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées.
L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.



On sait que sur un intervalle : f convexe $\iff$ f' croissante $\iff$ f'' positive
Il faut donc déterminer quelle fonction correspond à chacune des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

- La seule courbe qui corresponde aux variations de la fonction f est $\mathscr{C}_3$.
- La courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à une fonction négative sur $]-\infty\,;-1[$ et positive sur $]-1\,;+\infty[$; c'est donc la courbe représentative de la fonction f' car la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ est donc la représentation graphique de la fonction f''.

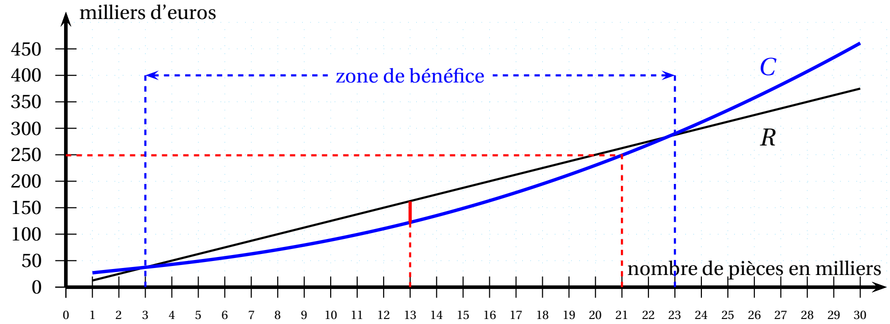
Pour déterminer la convexité de la fonction f, il suffit de regarder le signe de la fonction f'' : $f'' > 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1\,;30]$.



1. On trouve le coût de production de 21 000 pièces en cherchant l'image du nombre 21 par la fonction C : le coût de production de 21 000 pièces est à peu près de 250 000 euros.
2. L'entreprise réalise un bénéfice quand la recette est supérieure au coût de production, c'est-à-dire quand la fonction R est située au dessus de la fonction C : l'entreprise réalise un bénéfice pour une quantité de pièces produites comprise entre 3 000 et 23 000.
3. L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand, sur l'intervalle $[3\,;23]$, l'écart entre la fonction R et la fonction C est le plus grand ; c'est autour de 13 donc le bénéfice est maximal pour une production de 13 000 pièces.

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\,;30]$ par $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x$.

1. La fonction B est dérivable sur $[1\,;30]$ et
   $B'(x) = -0,5(2x) + 6 + 2\ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} = -x + 6 + 2\ln x + 2 = -x + 8 + 2\ln x$
2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\,;30]$.
   On donne le tableau de variations de la fonction dérivée B' :

x	1	2	30
$B'(x)$	7 ↗	$6+2\ln 2$	↘ $-22+2\ln 30$

   $B'(1) = -1 + 8 = 7$; $B'(2) = -2 + 8 + 2\ln 2 = 6 + 2\ln 2 \approx 7,4 > 0$;
   $B'(30) = -30 + 8 + 2\ln 30 = -22 + 2\ln 30 \approx -15,2 < 0$

   - Sur $[1\,;2[$: $1 \leqslant x < 2 \iff \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \iff 1 < \dfrac{2}{x} \leqslant 2 \iff 0 < -1 + \dfrac{2}{x} \leqslant 1 \implies B''(x) > 0$ donc B' est strictement croissante.
   - Sur $]2\,;30]$: $2 < x \leqslant 30 \iff \dfrac{1}{30} \leqslant \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2}{30} \leqslant \dfrac{2}{x} < 1 \iff -1 + \dfrac{2}{30} \leqslant -1 + \dfrac{2}{x} < 0 \implies$ $B''(x) < 0$ donc B' est strictement décroissante.
   - En $x = 2$, $B''(x) = 0$; la fonction B'' s'annule et change de signe donc la fonction B' admet un maximum égal à $B'(2) = 6 + 2\ln 2$.

3. **a.** On a vu que $B'(1) > 0$, $B'(2) > 0$ et $B'(30) < 0$; on complète le tableau de variations de B' :

x	1		2		α		30
$B'(x)$	7	↗	$6+2\ln 2$	↘	0	↘	$-22+2\ln 30$

On peut en déduire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;30]$, et que cette solution est dans l'intervalle $]2\,;30[$.

b. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve successivement :

- $\left.\begin{array}{l} B'(13) \approx 0,13 > 0 \\ B'(14) \approx -0,72 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13;\, 14]$
- $\left.\begin{array}{l} B'(13,1) \approx 0,045 > 0 \\ B'(13,2) \approx -0,04 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13,1;\, 13,2]$
- $\left.\begin{array}{l} B'(13,15) \approx 0,003 > 0 \\ B'(13,16) \approx -0,006 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13,15;\, 13,16]$
- $\left.\begin{array}{l} B'(13,153) \approx 0,0003 > 0 \\ B'(13,154) \approx -0,0005 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13,153;\, 13,154]$

Donc 13,153 est une valeur approchée de α au millième.

On peut également utiliser le solveur de la calculatrice.

4. On peut déduire des questions précédentes que :

- $B'(x) > 0$ sur $[1;\, \alpha[$
- $B'(x) < 0$ sur $]\alpha;\, 30]$
- $B'(\alpha) = 0$

$B(1) = -0,5+6-20+2\ln 1 = -14,5$; $B(30) = -0,5\times 30^2+6\times 30-20+2\times 30\times \ln 30 = -290+60\ln 30$

D'où le tableau de variations de la fonction B :

x	1		α		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	$-14,5$	↗	$B(\alpha)$	↘	$-290+60\ln 30$

5. L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand $x = \alpha$ ce qui correspond à une production de 13 153 pièces, à l'unité près.

Ce bénéfice maximal vaut $B(\alpha)$.

Or $\alpha \in [13,153;\, 13,154]$ et $B(13,153) \approx 40,20$ et $B(13,154) \approx 40,20$ milliers d'euros.

On peut donc dire que le bénéfice maximal, arrondi au millier d'euros, est de 40 000 €.